Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova
Olimpiada de matematică
Etapa locală-13 februarie 2010
Clasa a XI-a
Subiecte

1. Fie sirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0>0$, $x_1+x_2+...+x_n=\dfrac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}, n\geq 0$. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 x_n^3$

G.M.4/2009

2.Fie sirul $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ cu proprietatile :

a) $a_n>0$, $\forall\, n\in \mathbf{N}$

b) $a_{n+1}^2\cdot a_n^2=27+2a_{n+1}\cdot a_n^2$, $\forall\, n\in \mathbf{N}$ Sa se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$

Prof. Octavian Purcaru-Ploiesti

3.Pentru fiecare numar natural considerăm matricea de ordinul 3 :

$$A_n=\begin{pmatrix} 2^{[\sqrt{n+1}]} & 2^{[\sqrt{n+2}]} & 2^{[\sqrt{n+3}]} \\ 2^{[\sqrt{n+4}]} & 2^{[\sqrt{n+5}]} & 2^{[\sqrt{n+6}]} \\ 2^{[\sqrt{n+7}]} & 2^{[\sqrt{n+8}]} & 2^{[\sqrt{n+9}]} \end{pmatrix}$$

.Sa se arate ca exista $k\in \mathbf{N}$ astfel incat $\forall\, n\geq k$, $n\in \mathbf{N}$, matricea A_n nu este inversabila (am notat cu [a] –partea intreagă a lui a).

Prof.Emil Vasile -Ploiesti

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & \varepsilon^2 b \\ b & a \end{pmatrix}$ $a,b,\varepsilon\in \mathbf{C}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $si\ n\in \mathbf{N}^*$

a) Sa se demonstreze că :
$$A^n=\begin{pmatrix} \dfrac{(a+b\varepsilon)^n+(a-b\varepsilon)^n}{2} & \dfrac{(a+b\varepsilon)^n-(a-b\varepsilon)^n}{2}\varepsilon \\ \dfrac{(a+b\varepsilon)^n-(a-b\varepsilon)^n}{2\varepsilon} & \dfrac{(a+b\varepsilon)^n+(a-b\varepsilon)^n}{2} \end{pmatrix}$$

b) Sa se calculeze B^n

c) Sa se rezolve in $M_2(\mathbf{C})$ ecuatia $X^n = B$

Prof. Cezar Apostolescu-Ploiesti

SUCCES!

<u>Notă:</u>

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10